

# 90-летие Исаака Марковича Халатникова

Черноголовка, 22-23 октября 2009 года

Влияние коррелированного беспорядка на  
температуру необычного куперовского  
спаривания

И.А. Фомин

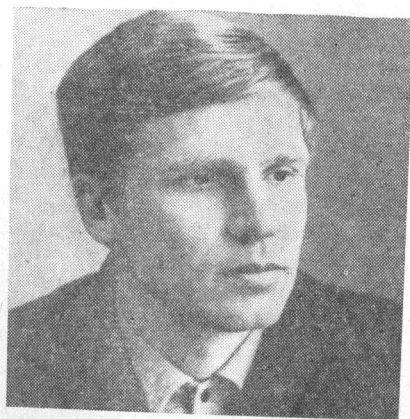
*Институт физических проблем им. П.Л. Капицы*

# Сверхтекучесть и фазовые переходы в жидком гелии-3

Член-корреспондент АН СССР И. М. Халатников  
И. А. Фомин  
Кандидат физико-математических наук



*Исаак Маркович Халатников, директор Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Работает во многих областях теоретической физики. Специалист по теории сверхтекучести. Автор монографий: Введение в теорию сверхтекучести. М., «Наука», 1965; Теория сверхтекучести. М., «Наука», 1971.*



*Игорь Акиндинович Фомин, младший научный сотрудник Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Основное направление исследований — теория квантовых жидкостей.*

долей градуса. Относительно этот скачок — уменьшение достижимой температуры в 100 и 1000 раз — много больше предыдущего и поэтому следовало ожидать новых открытий. В этой статье мы расскажем о наиболее интересном и, по-видимому, наиболее важном открытии в этой области температур — обнаружении новых фаз жидкого гелия-3, а также об исследованных к настоящему времени свойствах этих фаз.

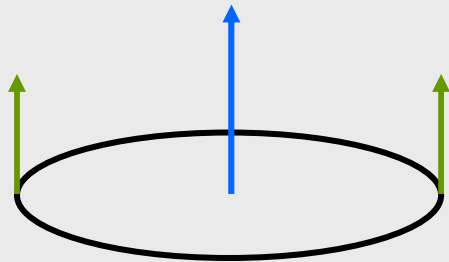
Существуют два устойчивых изотопа гелия: гелий-4, ядро которого содержит два нейтрона и два протона, и более легкий и значительно менее распространенный в природе гелий-3 — в его ядре на один нейтрон меньше. В результате суммарный спин атома гелия-4, состоящего из четного числа частиц с полуцелым спином, — целый, а спин атома гелия-3 — полуцелый. Это различие оказывается очень существенным, когда речь идет о свойствах жидкостей, состоящих из атомов гелия-3 или гелия-4. Обе эти жидкости могут существовать только при очень низких температурах. Жидкий гелий-4 при нормальном давлении кипит при 4,2 К, а гелий-3 при 3,2 К. При таких температурах тепловое движение атомов становится слабым, а соответствующая этому движению длина волн де Бройля  $\lambda = 2\pi\hbar/mv$  (где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — масса атома и  $v$  — его скорость) —

Необычные (*unconventional*) сверхпроводники:  
UPt<sub>3</sub>, UGe<sub>2</sub>, Sr<sub>2</sub>RuO<sub>4</sub>, high-T<sub>c</sub>, ...

<sup>3</sup>He – сверхтекучая ферми-жидкость с необычным куперовским спариванием.

S=1

l=1,3,5...



$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow\uparrow} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\uparrow\downarrow} + \psi_{\downarrow\uparrow}) \\ \psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}$$

Параметр порядка сверхтекучего  $^3\text{He}$ :

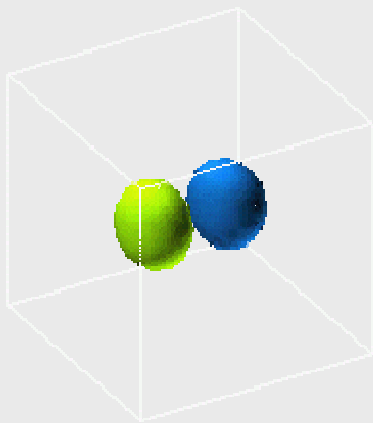
$$s=1, l=1$$

$$\Psi_{\mu} = \sum A_{\mu j} k_j$$

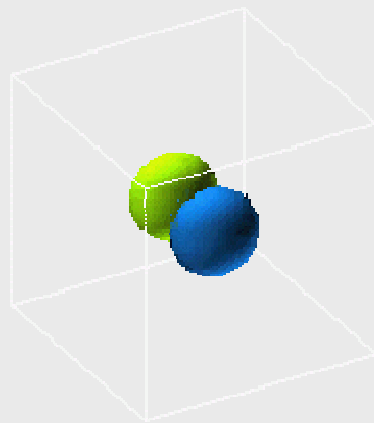
$A_{\mu j}$

орбитальный индекс  $j=1,2,3$   
нумерует  $p_x, p_y, p_z$ - орбитали

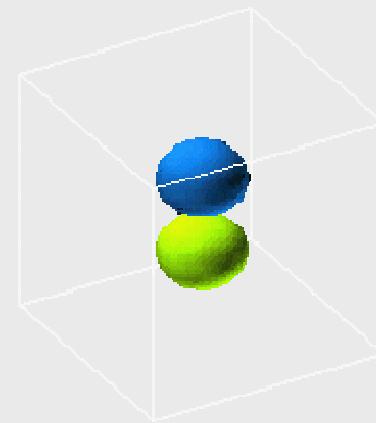
спиновый индекс  $\mu = 1,2,3$



$p_x$

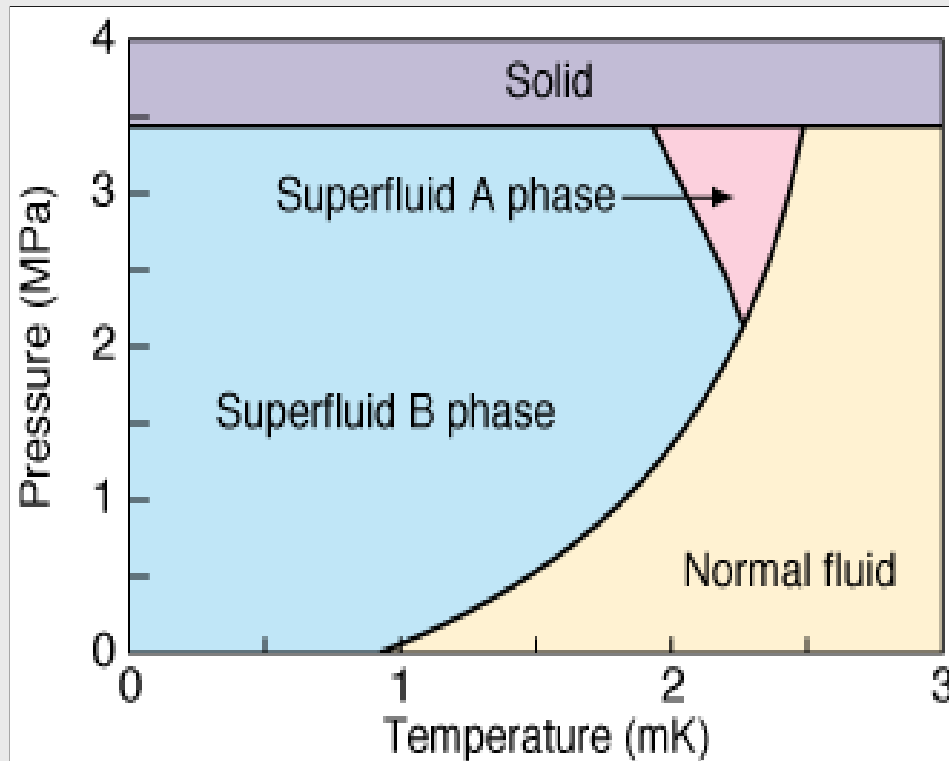


$p_y$



$p_z$

## Фазовая диаграмма чистого $^3\text{He}$



$$A_{\mu j}^{ABM} = \Delta \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{d}_{\mu} (\hat{m}_j + i \hat{n}_j),$$
$$A_{\mu j}^{BW} = \Delta \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi} R_{\mu j}.$$

1. Как ввести примеси?
2. Чего ожидать?

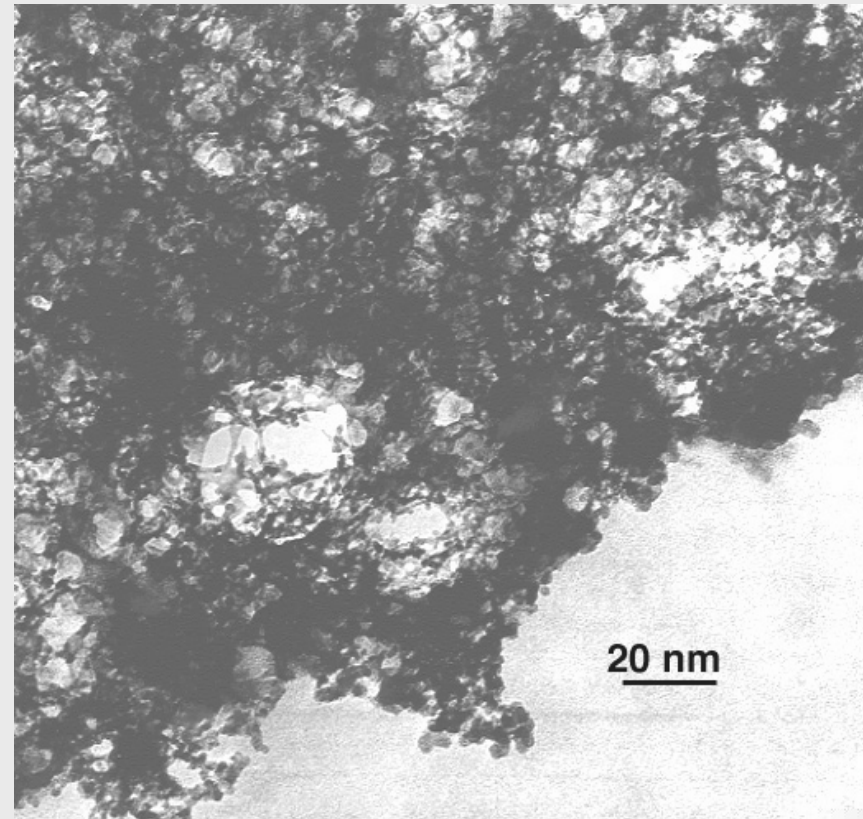
## Самоподдерживающаяся структура – аэрогель ( $\text{SiO}_2$ ).

- [1] J. V. Porto and J. M. Parpia, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4667 (1995)
- [2] D. T. Sprague, T. M. Haard, J. B. Kycia, V. R. Rand, Y. Lee, P. Hamot and W. P. Halperin, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 661 (1995)

Пористость  $P =$   
(объём пустот/полный объём)

Можно достичь  
пористости 99.5%

Обычно используют  
аэрогели с пористостью  
около 98%



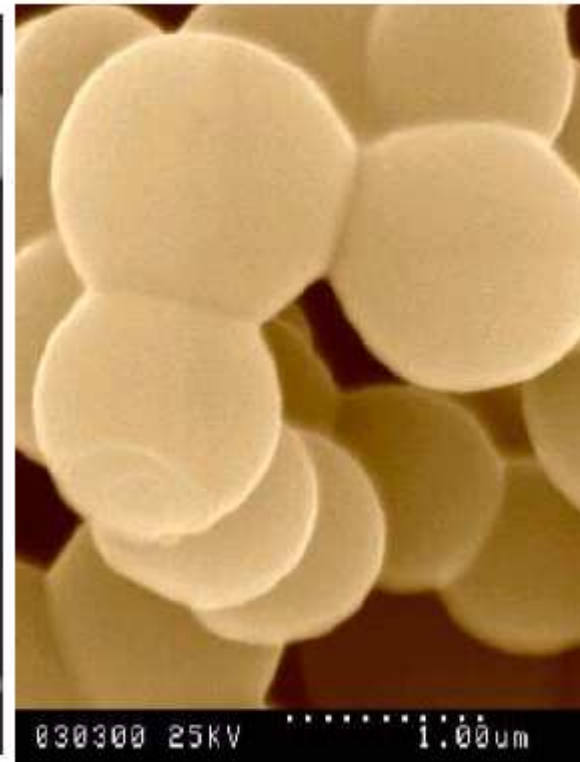
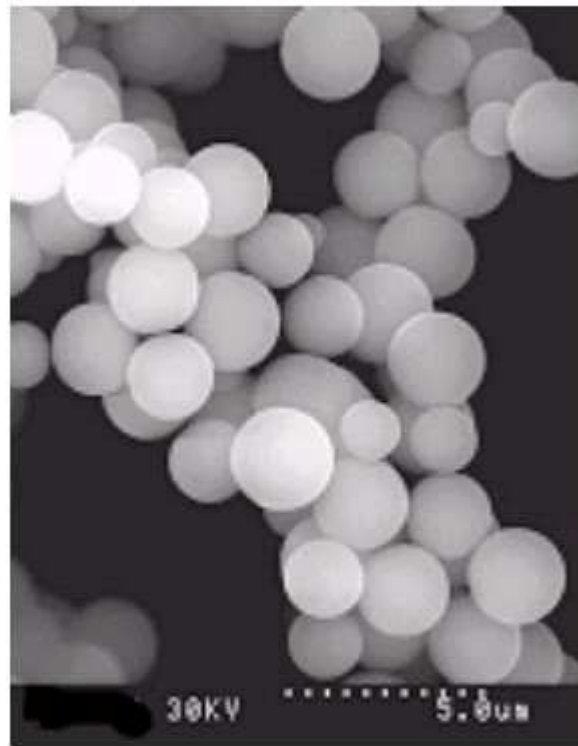


Fig 3. SEM micrographs of porous silica aerogel microparticles.



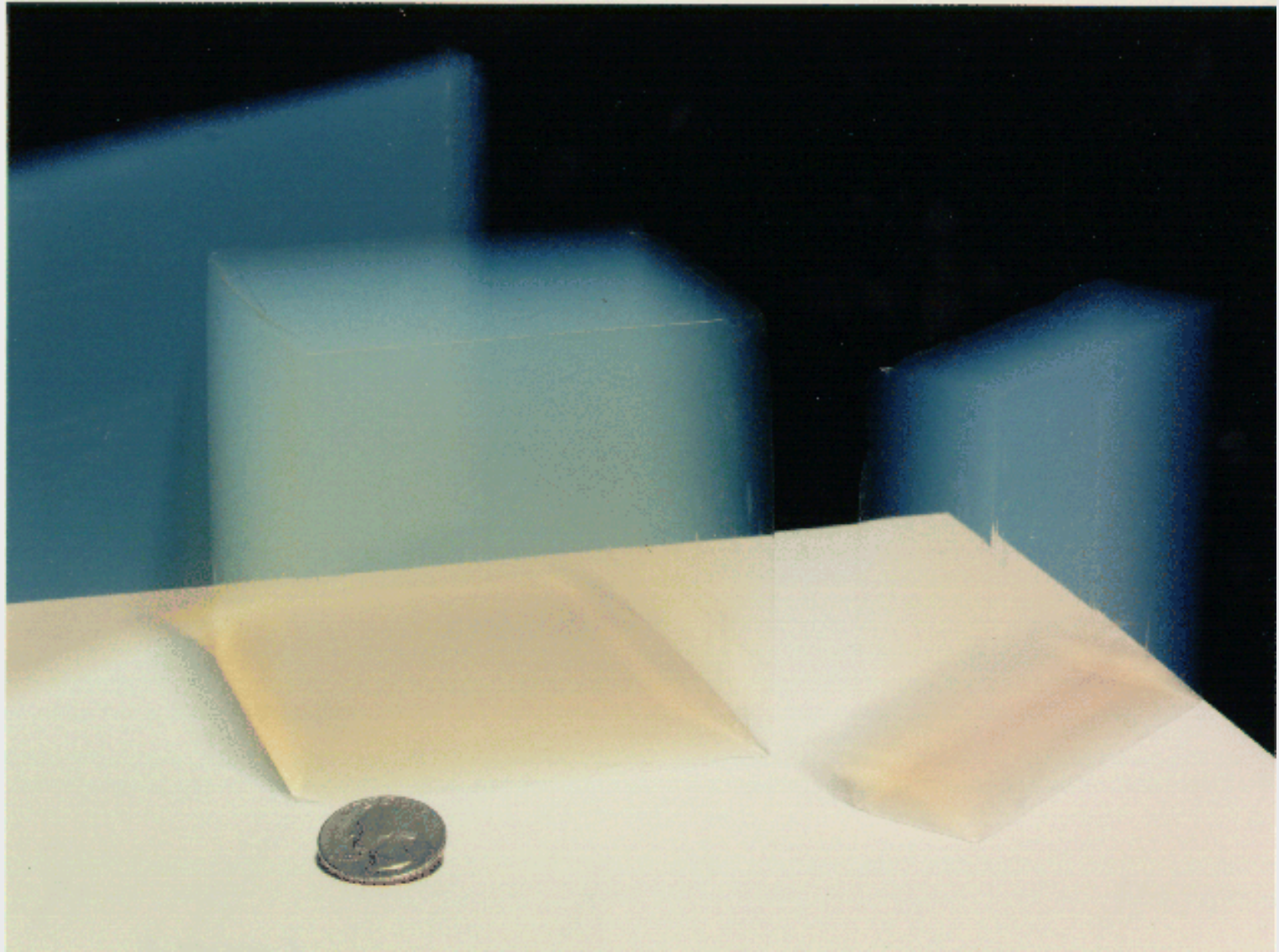
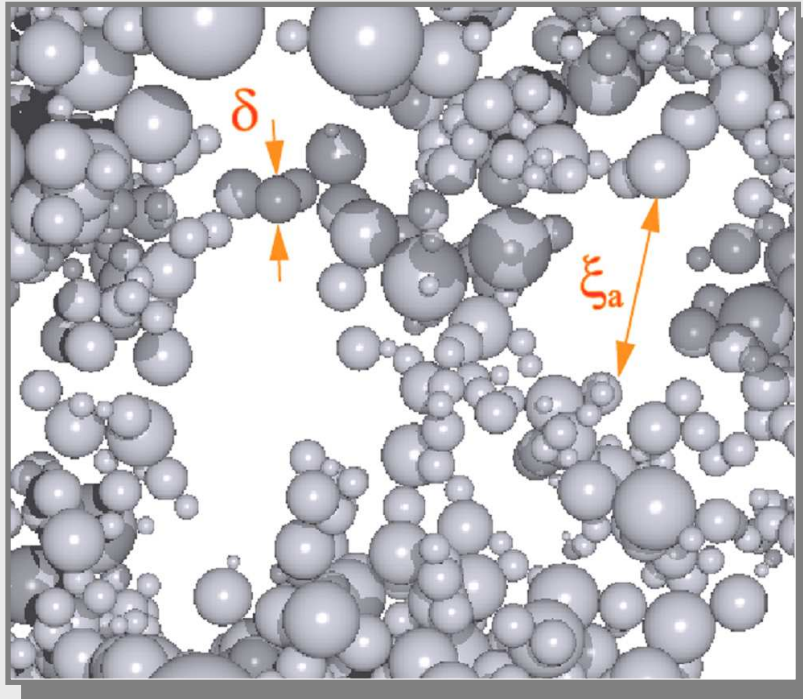






Fig 1. A 2.5 kg brick is supported on top of a piece of aerogel weighing only 2.38 g. (NASA)



DLCA simulation of a silica aerogel depicting the length scales  $\delta$  and  $\xi_a$  (courtesy of T.M. Lippman).

- Silica ball size:  
 $\delta \approx 3 \text{ nm}$
- Correlation length:  
 $\xi_a \sim 10 - 100 \text{ nm}$
- Superfluid coherence length:  
 $\xi \approx 20 - 80 \text{ nm}$  ( $P = 34 - 0 \text{ bar}$ )
- Expect interesting physics  
when:  $\xi \sim \xi_a$

# Чего ожидать?

Согласно теории сверхпроводящих сплавов

A.A. Abrikosov and L.P. Gorkov, *ZhETF* **39**, 1781 (1961), [*Sov. Phys. JETP* **12**, 1243 (1961)].

для обычных сверхпроводников и немагнитных примесей

$$T_c \approx T_c^0$$

для необычных

A. I. Larkin, *ZhETF*, **58**, 1466 (1970) [*Sov. Phys. JETP*, **31**, 784 (1970)]

$$\ln \frac{T_c^0}{T_c} = \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi_0}{2l_{tr}} \frac{T_c^0}{T_c} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$$

$$\frac{T_c^0 - T_c}{T_c^0} \approx \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}}$$

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{2\pi T_c^0}$$

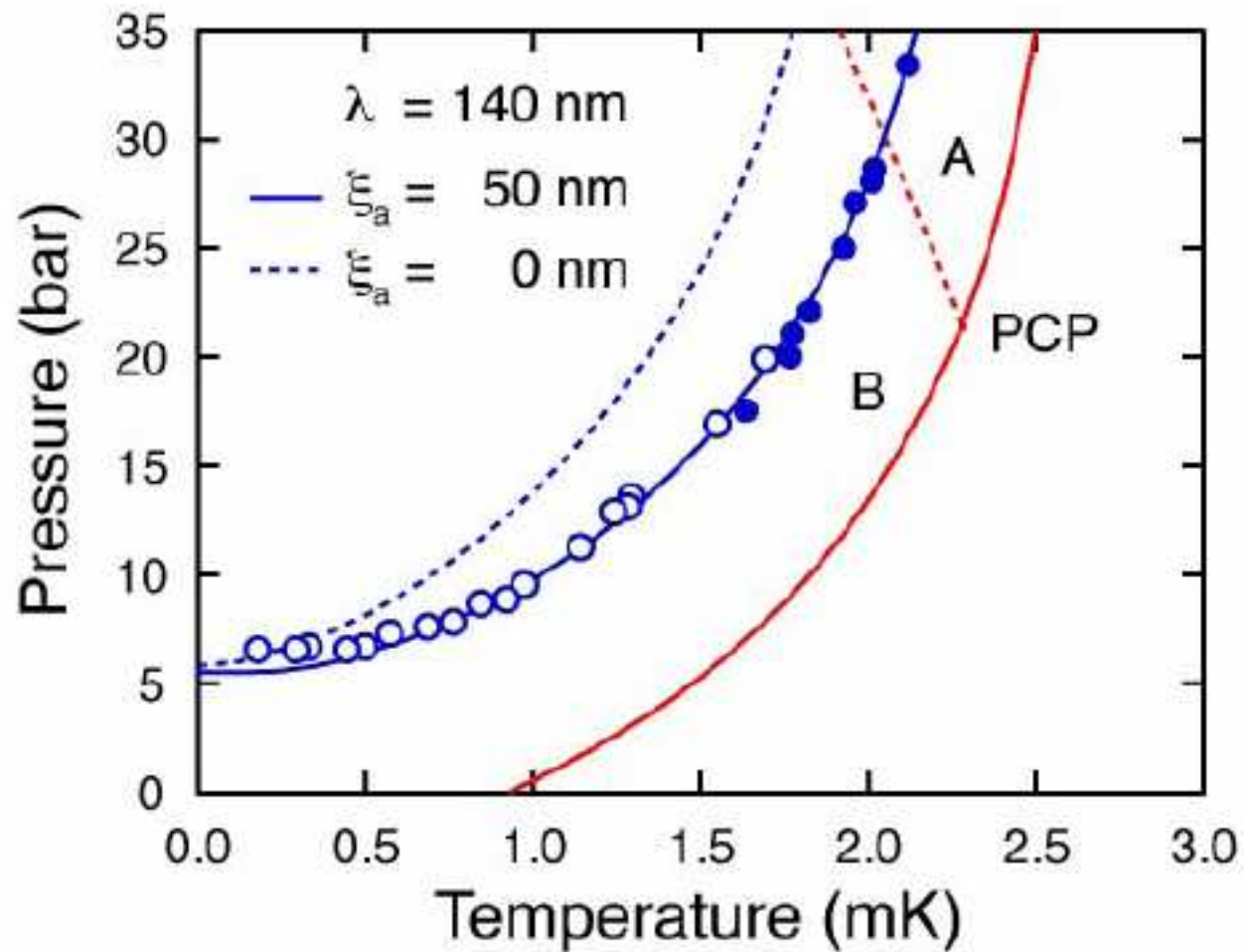
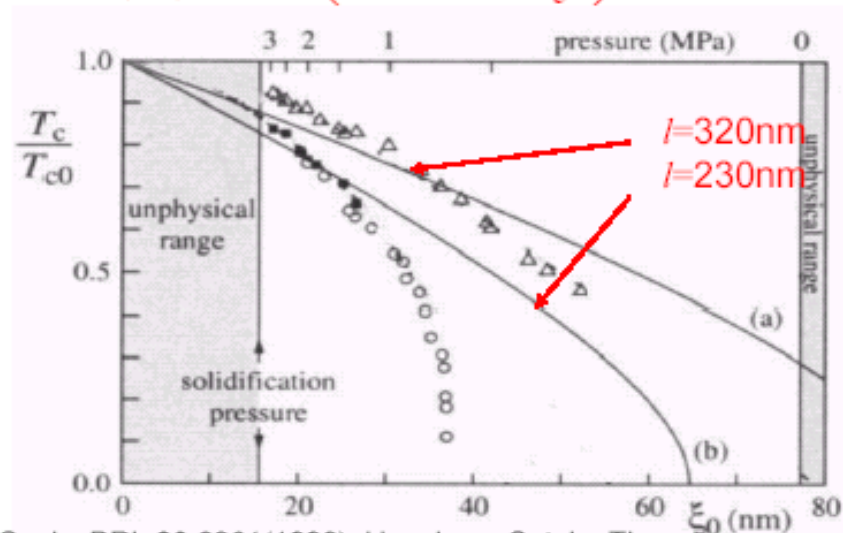


FIG. 1: Phase diagram for superfluid  $^3\text{He}$  in two different samples of 98% aerogel. The known superfluid phases of

Compare suppression to model of point magnetic scatterers in s-wave superconductors

Abrikosov-Gorkov – homogenous scattering model

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_c^0}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\xi_0}{4l} \frac{T_c^0}{T_c}\right)$$



Thuneberg, Yip, Fogelstrom, Sauls, PRL **80** 2861(1998), Hanninen, Setala, Thuneberg, Physica B, **255** 11 (1999),

$$(T^0 - T_c)/T_c^0 \sim \xi_0/l_{tr}$$

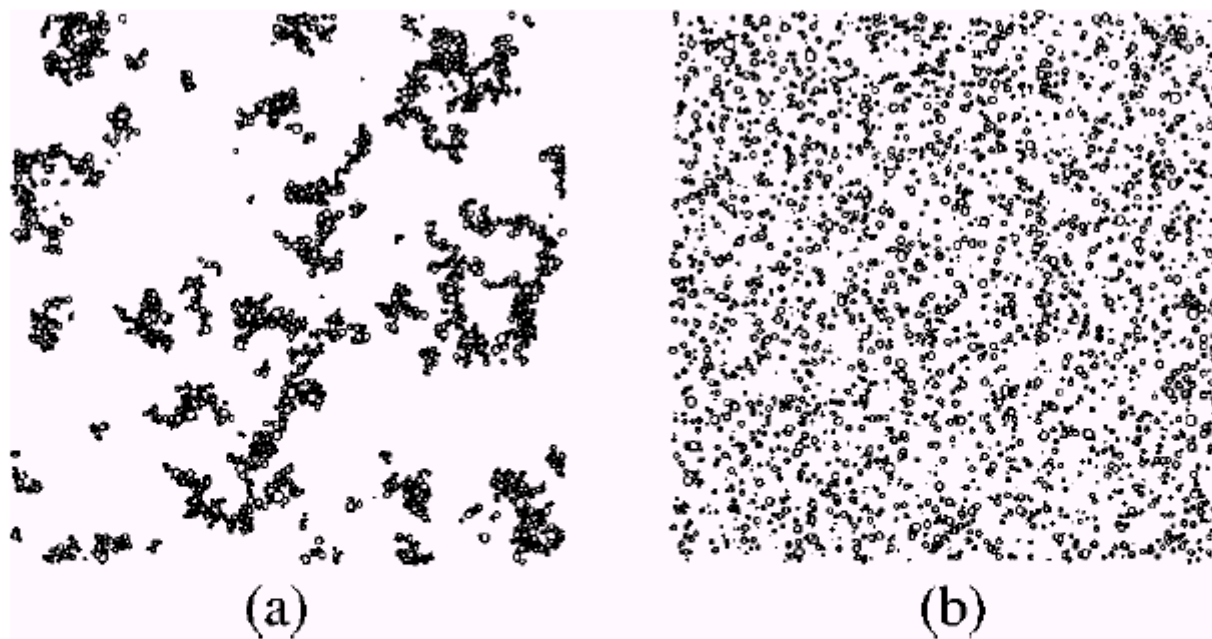


FIG. 3. Panel (a) shows a 300-Å-thick slice of the aerogel shown in Fig. 2(a). A similar slice of the random arrangement of spheres is shown in panel (b).

## Свободная энергия

$$f = f_n + \alpha A_{\mu j} A_{\mu j}^* + \beta_1 |A_{\mu j} A_{\mu j}|^2 + \beta_2 (A_{\mu j} A_{\mu j}^*)^2 + \\ \beta_3 A_{\mu j}^* A_{\nu j}^* A_{\nu l} A_{\mu l} + \beta_4 A_{\mu j}^* A_{\nu j} A_{\nu l}^* A_{\mu l} + \beta_5 A_{\mu j}^* A_{\nu j} A_{\nu l} A_{\mu l}^*.$$

$$F_\eta = N(0) \int \eta_{jl}(\mathbf{r}) A_{\mu j} A_{\mu l}^* d^3 r.$$

$$F_{GL} = N(0) \int d^3 r \left[ \tau A_{\mu j} A_{\mu j}^* + \eta_{jl}(\mathbf{r}) A_{\mu j} A_{\mu l}^* + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^5 \beta_s I_s + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( K_1 \frac{\partial A_{\mu l}}{\partial x_j} \frac{\partial A_{\mu l}^*}{\partial x_j} + K_2 \frac{\partial A_{\mu l}}{\partial x_j} \frac{\partial A_{\mu j}^*}{\partial x_l} + K_3 \frac{\partial A_{\mu j}}{\partial x_j} \frac{\partial A_{\mu l}^*}{\partial x_l} \right) \right],$$

$$\tau = (T_b - T)/T_b$$



$$a \ll d \ll \xi_0$$

D. Rainer and M. Vuorio, J. Phys. C: Solid State Phys., **10** (1977) 3093 .

$$\Delta F^{obj} = \int d^3r d^3r' A_{\mu j}^*(\mathbf{r}) \mathcal{K}_{jl}^{obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_{\mu l}(\mathbf{r}')$$

$$\mathcal{K}_{jl}^{obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (2\pi N(0)T_c/v_F) \sum_n \exp(-2|\omega_n|(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|)/v_F) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})_j (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')_l}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3 |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^3} \\ \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}, \mathbf{r}' \hat{-} \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}, \mathbf{r}' \hat{-} \mathbf{r}_0) \sigma_{tot}(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}) \right]$$

$$\Delta F^{obj} = \int d^3r A_{\mu j}^*(\mathbf{r}) \left( \int \mathcal{K}_{jl}^{obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' \right) A_{\mu l}(\mathbf{r})$$

$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{N(0)} \int \mathcal{K}_{jl}^{obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r'$$

$$-\tau A_{\mu j} + A_{\mu l} \eta_{lj}(\mathbf{r}) - \frac{3}{5} \xi_s^2 \left( \frac{\partial^2 A_{\mu j}}{\partial x_l^2} + 2 \frac{\partial^2 A_{\mu l}}{\partial x_l \partial x_j} \right) = 0$$

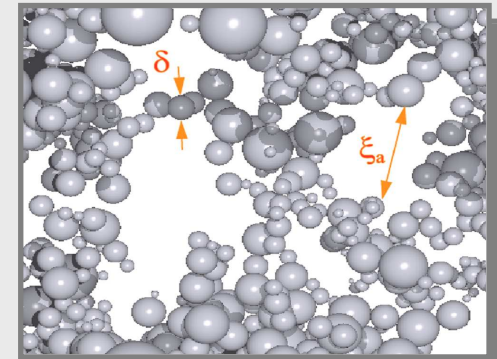
$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \sum_s \eta_{jl}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$$

$$\eta_{jl}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\rho^2}{r^2} \hat{\nu}_j \hat{\nu}_l \ln \left[ \tanh \left( \frac{r}{2\xi_0} \right) \right]$$

D. Rainer and M. Vuorio, J. Phys. C: Solid State Phys., **10** (1977) 3093 .

$$\eta^{(1)} \sim \frac{\rho^2}{\xi_0^2} \ll 1$$

$$\xi_s^2 = \frac{7\zeta(3)}{12} \xi_0^2 \simeq 0,7 \xi_0^2$$



DLCA simulation of a silica aerogel depicting the length scales  $\delta$  and  $\xi_a$  (courtesy of T.M. Lippman).

# Теория возмущений

$$\langle G_{mn}(\tau; \mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{mn} G(\tau; \mathbf{k})$$

$$\text{thick arrow} = \text{thin arrow} + \text{thin arrow with cross} + \text{thin arrow with two crosses} + \dots$$

$$G(\tau; \mathbf{k}) = \frac{1}{\tau - \xi_0^2 k^2 - \Sigma(\tau, \mathbf{k})}$$

$$\Sigma(\tau, \mathbf{k}) = \text{cross} + \text{thin arrow with dashed semi-circle} + \dots$$

Дальний порядок:  $k=0$

$$\tau = \Sigma(\tau, 0)$$

$\mathbf{k} \longrightarrow \times \longrightarrow \mathbf{k}'$

$$\langle \eta_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rangle = \eta_{jl}^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \sum_a e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}_a} \rangle$$

$$\langle \sum_a e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}_a} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n$$

$$\tau_{ba}^{(1)} = n \eta^{(1)}(0) = \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}}$$

$$\eta_i^{(1)}(\mathbf{k} = 0) = \frac{\pi^3}{3} \rho^2 \xi_0$$

$$\frac{4}{3} \pi \rho^2 n = \frac{1}{l_{tr}}$$

$$\tau_{ba}^{(1)} = \frac{T_b - T_a}{T_b} = \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}}$$

Совпадает с результатом теории сплавов

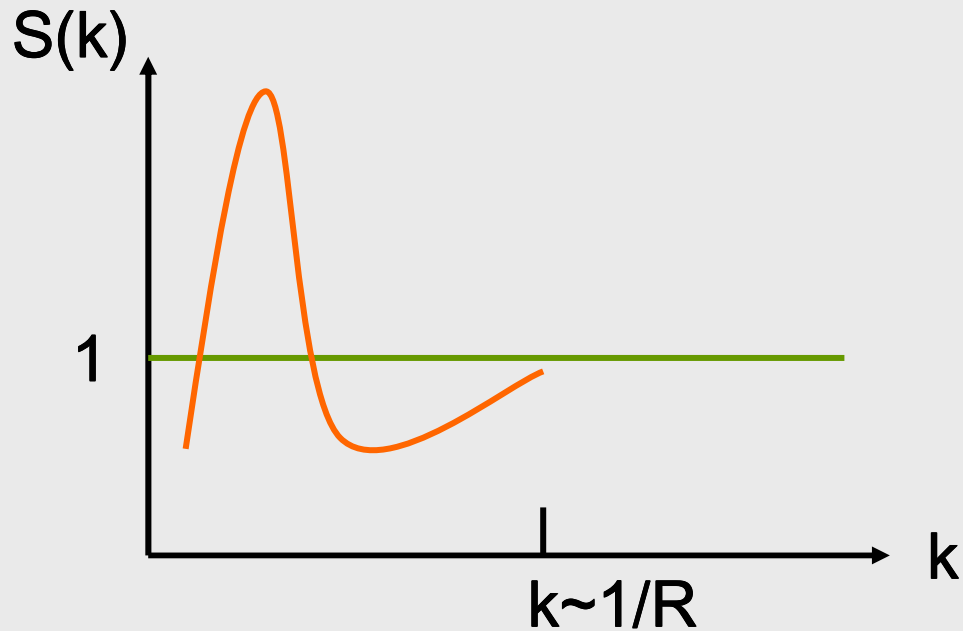
$$\Sigma_2(\tau, k) = \int_{k_1}^{k-k_1} S(k-k_1) \dots$$

$$\sim \int \eta^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \eta^{(1)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}') \langle \sum_{a,b} e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\mathbf{r}_a} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}_b} \rangle G(\mathbf{k}_1) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}$$

$$\langle \sum_{a,b} e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\mathbf{r}_a} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}_b} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') n \langle \sum_{a-b} e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\mathbf{r}_{ab}} \rangle$$

$$\langle \sum_{a-b} e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\mathbf{r}_{ab}} \rangle \equiv S(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})$$

Обычно учитывается только член с  $a=b$ :  $S(k-k_1)=1$



$$\int [S(\mathbf{k}) - 1] \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = n.$$

$$\tau_{ba}^{(2)} = n\eta^{(1)}(0)\eta^{(1)}(0) \int S(k_1)G(k_1) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}$$

$$G(k_1) = -\frac{5}{2\xi_0^2 k_1^2}$$

$$\tau_{ba}^{(2)} \sim (n\eta^{(1)}(0))^2 \frac{R^2}{\xi_0^2} \sim \tau_{ba}^{(1)} \frac{R^2}{\xi_0 l_{tr}}$$

при

$$R^2 \sim \xi_0 l_{tr}$$

$$\tau_{ba}^{(2)} \sim \tau_{ba}^{(1)}$$

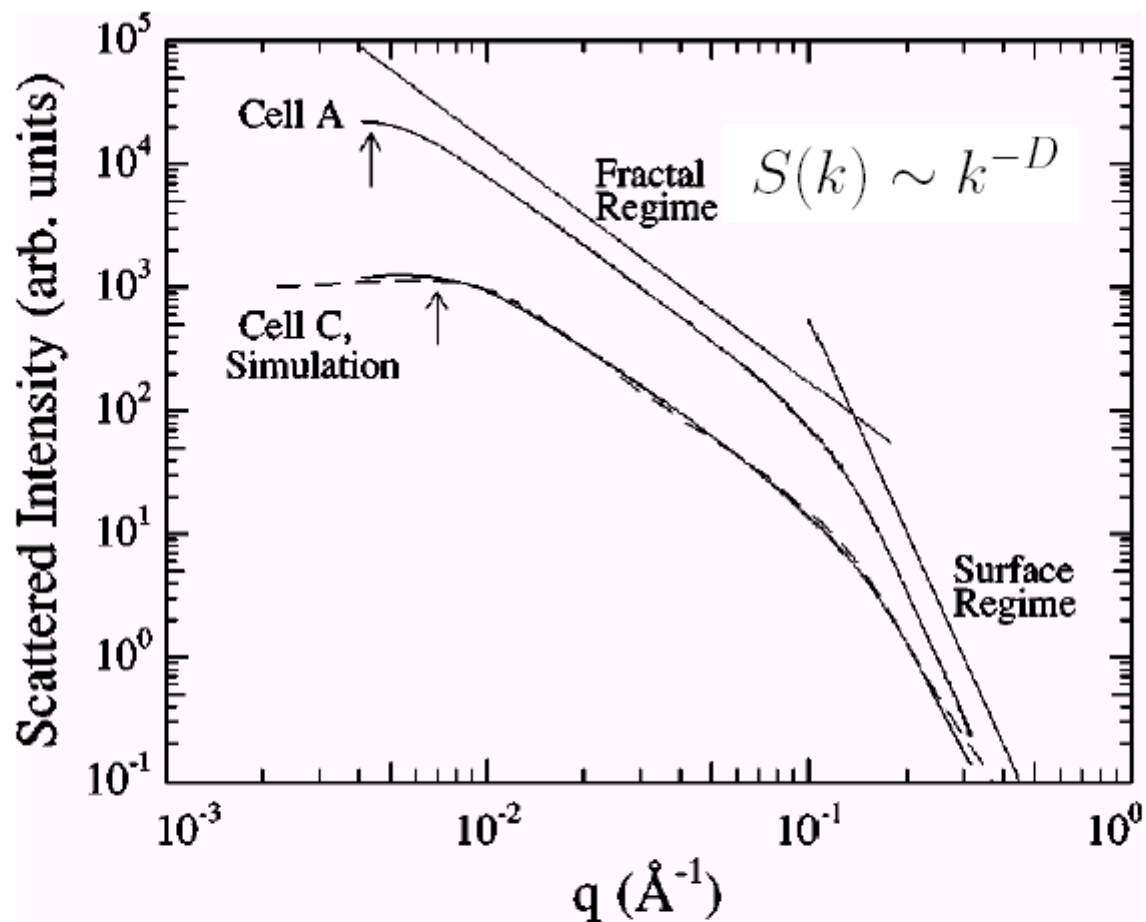


FIG. 1. Small-angle x-ray scattering from two different aerogels. The upper solid curve is for the aerogel sample from cell A and the lower solid curve is for the aerogel from cell C. (Both samples were 98.2% open). The dashed line is the scattered inten-



$$k_{min} \ll k \ll k_{max}$$

$$k_{min} \approx \frac{1}{R}$$

$$k_{max} \approx \frac{1}{\rho}$$

$$S(\mathbf{k}) \sim \frac{nR^3}{(kR)^D}$$

$$\tau_{ba}^{(2)} = n\eta^{(1)}(0)\eta^{(1)}(0) \int S(k_1)G(k_1) \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}$$

$$G(k_1) = -\frac{5}{2\xi_0^2 k_1^2}$$

$$\tau_{ba}^{(2)} = -(n\eta^{(1)}(0))^2 A \frac{R^3}{\xi_0^2} \int \frac{dk}{(kR)^D}$$

$$D \approx 1.8$$

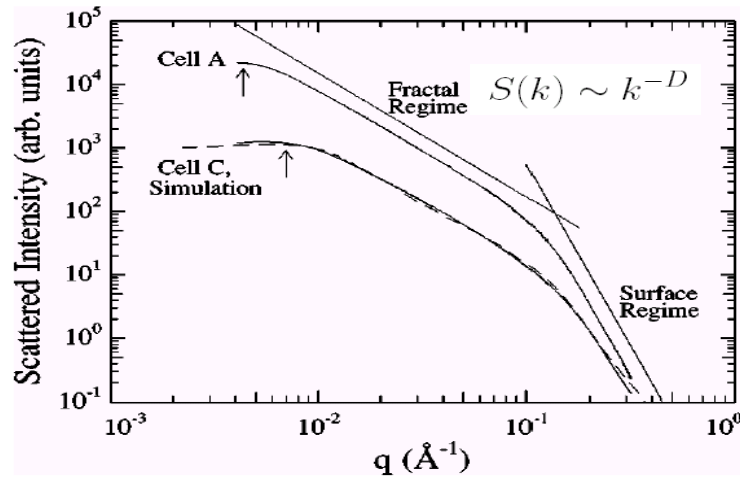


FIG. 1. Small-angle x-ray scattering from two different aerogels. The upper solid curve is for the aerogel sample from cell A and the lower solid curve is for the aerogel from cell C. (Both samples were 98.2% open). The dashed line is the scattered inten-

$$A \int_{k_{min}} \frac{Rdk}{(Rk)^D} = B \sim 1$$

$$\tau_{ba}^{(2)} = -\tau_{ba}^{(1)} \left( \frac{\pi^2}{4} B \frac{R^2}{\xi_0 l_{tr}} \right)$$

$$\tau_{ba} = \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}} - \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}} \left( \frac{\pi^2 R^2}{4 \xi_0 l_{tr}} \frac{3-D}{D-1} \right)$$

$$\xi_0 \ll l_{tr}$$

$$\xi_0 \ll R$$

$$l_{tr} \approx 1400 \text{ \AA} \quad \xi_0 \approx 200 \text{ \AA} \quad R \approx 500 \text{ \AA}$$

$$R^2 \sim \xi_0 l_{tr}$$

$$\tau_{ba}^{(2)} \sim \tau_{ba}^{(1)}$$

$$\Sigma_3(\tau, k) = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

The diagram shows the self-energy  $\Sigma_3(\tau, k)$  as a sum of three terms. The first term is a horizontal arrow with a dashed semi-circular loop above it. The second term is a horizontal arrow with a dashed semi-circular loop below it. The third term is a horizontal arrow with two dashed semi-circular loops above it, labeled  $k_1$  and  $k_2$  respectively.

$$\tau_{ba}^{(3)} \sim n(\eta^{(1)}(0))^3 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} G(k_1) G(k_2) \langle \sum e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_{ab}} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_{ca}} \rangle$$

$$\langle \sum e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_{ab}} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_{ca}} \rangle = S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2)$$

$$Q = \frac{1}{n} \int S(k_1) G(k_1) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}$$

$$\tau_{ba}^{(3)} = \tau_{ba}^{(2)} n \eta^{(1)}(0) Q = \tau_{ba}^{(2)} \tau^{(1)} Q$$

$$\tau_{ba} = \frac{\tau^{(1)}}{1 - \tau^{(1)} Q}$$

$$\tau_{ba} = \frac{\frac{\pi^2}{4} \frac{\xi_0}{l_{tr}}}{1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{R^2}{\xi_0 l_{tr}} \frac{3-D}{D-1}}$$

$$R^2 \ll \xi_0 l_{tr}$$

$$\tau_{ba} \approx \tau^{(1)}$$

$$R^2 \gg \xi_0 l_{tr}$$

$$\tau_{ba} \sim \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2$$

J.A. Sauls, and P. Sharma, *Phys. Rev.*, **B68**, 224502 (2003)

$$x = \frac{\xi_0}{2l}$$

$$\xi_a = R\pi \sqrt{(3-D)/8(D-1)}$$

$$\zeta_a = \xi_a/l_{tr}$$

$$x \rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{1 + \zeta_a^2/x}$$

$$\ln \frac{T_c^0}{T_c} = \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi_0}{2l_{tr}} \frac{T_c^0}{T_c} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right)$$

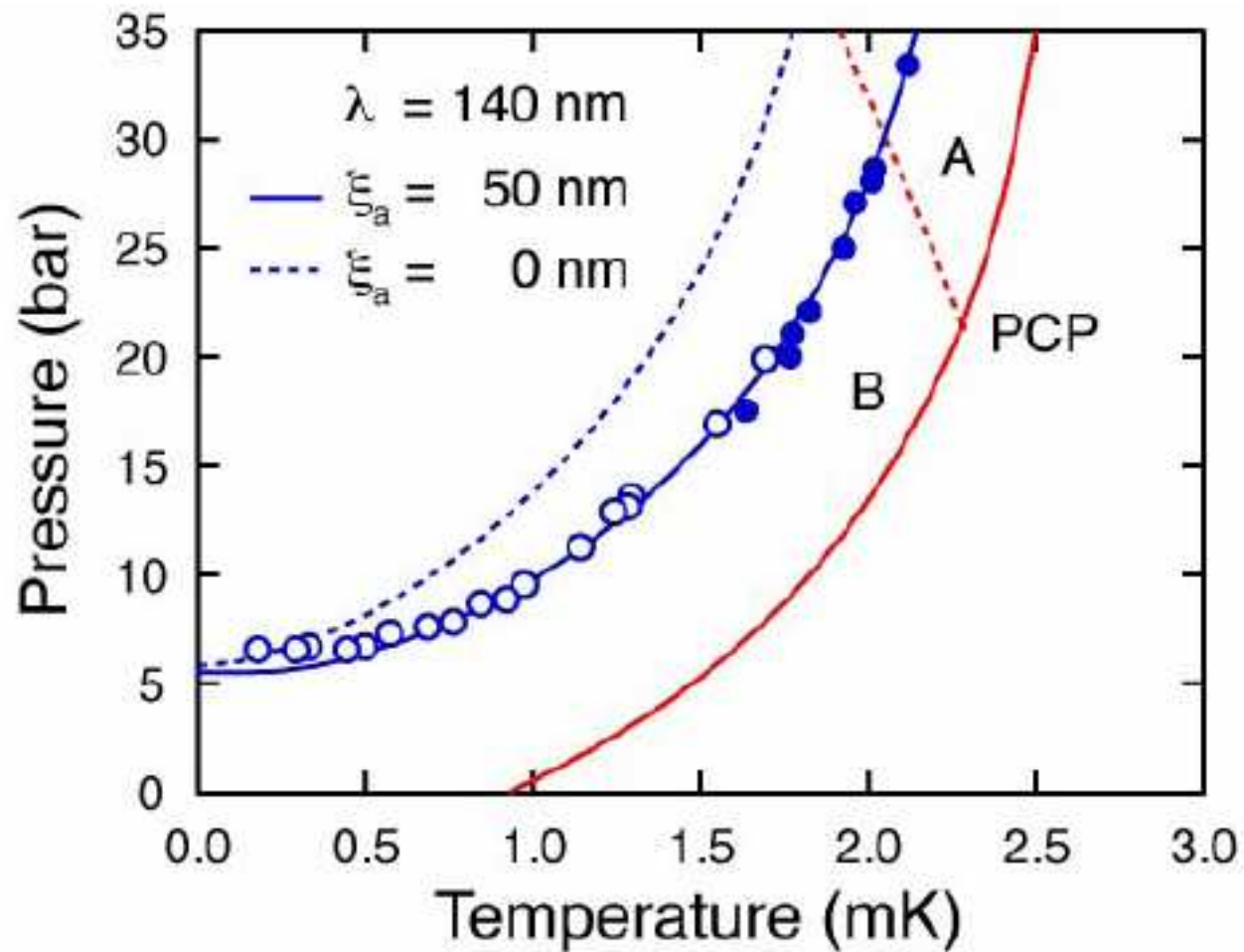


FIG. 1: Phase diagram for superfluid  $^3\text{He}$  in two different samples of 98% aerogel. The known superfluid phases of

## Выводы

Корреляции в расположении примесей оказывают существенное влияние на  $T_c$  (возможно и на другие свойства сверхпроводников) если  $R^2 \sim \xi_0 l_{tr}$  .

Хорошо иметь малые  $\xi_0$  и  $l_{tr}$  (например – high- $T_c$ ).

Влияние корреляций может проявляться и в обычных сверхпроводниках.

И.Ф., Письма в ЖЭТФ, **88**, 65 (2008)





Поздравляю!



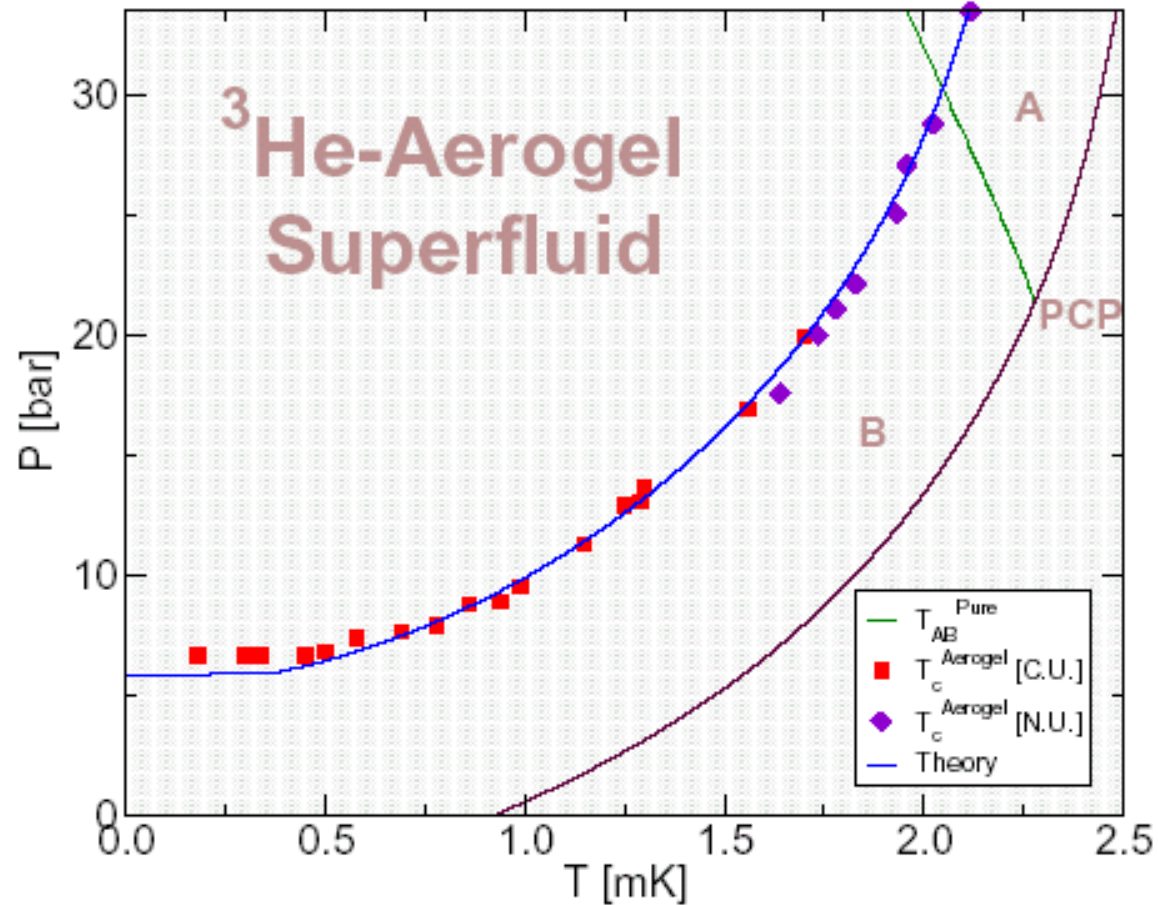


FIG. 1: The phase diagram for  $^3\text{He}$  in 98 % aerogel. The data are from Refs. 4 and 25. The theoretical curve is calculated from  $\bar{\alpha}(T_c) = 0$  using Eq. (4) in zero field with the effective pair-breaking parameter  $\tilde{x}$  evaluated with  $\xi_a = 502 \text{ \AA}$  and  $\ell = 1400 \text{ \AA}$ . The phase boundaries for pure  $^3\text{He}$  are shown for comparison.

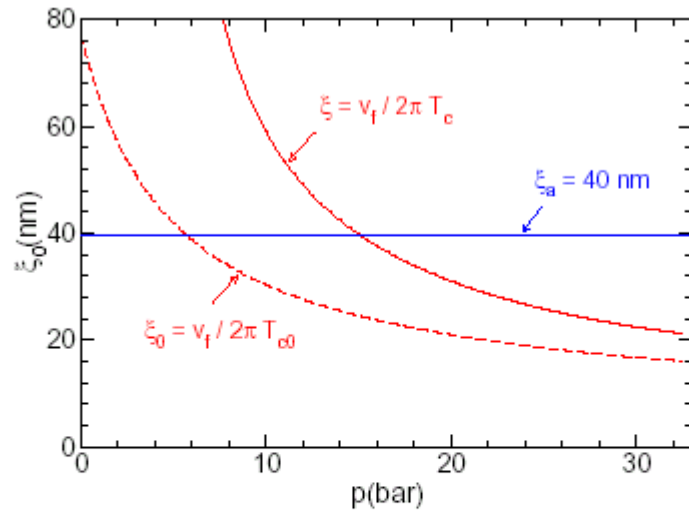


FIG. 2: The pair correlation length of superfluid  $^3\text{He}$  in aerogel (solid curve) as a function of pressure is shown in comparison with an aerogel strand-strand correlation length,  $\xi_a \simeq 40$  nm. A cross-over occurs near  $p \approx 15$  bar. The bulk  $^3\text{He}$  correlation length is also shown (dashed curve).

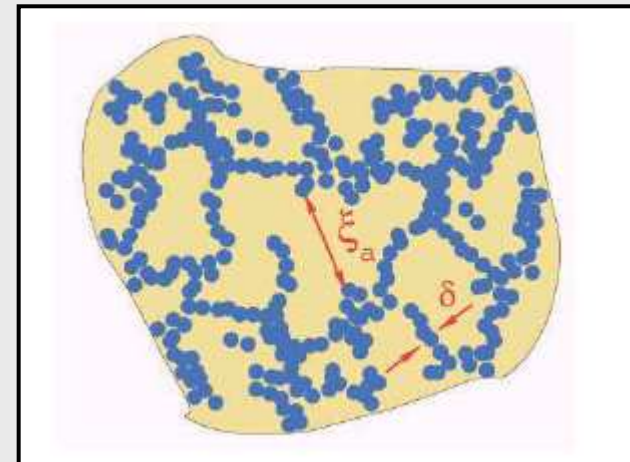
Sharma & Sauls, PRB **68224500** (2003)

When  $\xi_{3\text{He}} \gg \xi_a \ll l$  (*mfp*),

$\delta T_c / T_{c0} \sim -(\xi_{3\text{He}} / l)$ .

When  $\xi_{3\text{He}} \sim \xi_a \ll l$  (*mfp*),  $T_c$  set by most dense regions

$\delta T_c / T_{c0} \sim -(\xi_{3\text{He}} / \xi_a)^2$ .



$$x = \frac{\xi_0 T_c^0}{l_{tr} T_c}$$

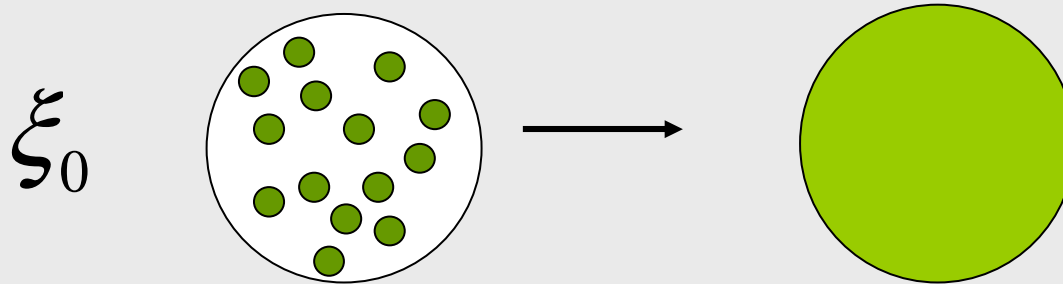
$$x \rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{1 + \zeta_a^2 / x}$$

where  $\zeta_a \equiv \xi_a / l$

$$\ln \frac{T_c^0}{T_c} = \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi_0 T_c^0}{2 l_{tr} T_c} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right)$$

## Модель однородного рассеяния

E.V. Thuneberg, S.-K. Yip, M. Fogelstrom, and J.A. Sauls, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2861 (1998)



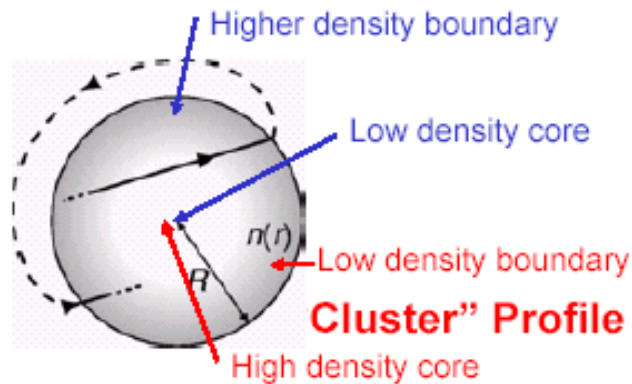
$$\exp\left(-\frac{i\xi t}{\hbar}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{i\xi t}{\hbar} - \frac{\gamma t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{\hbar}{\gamma} = \tau = \frac{l}{v}$$

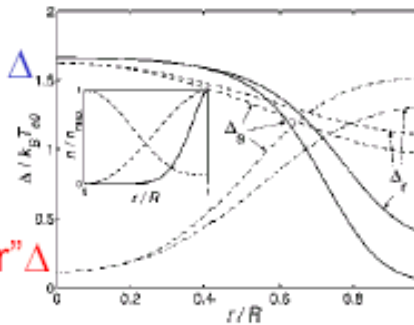
$$\ln \frac{T_c^0}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\xi_0 T_c^0}{2l_{tr} T_c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

# Inhomogeneous Impurity Scattering Model (IISM)

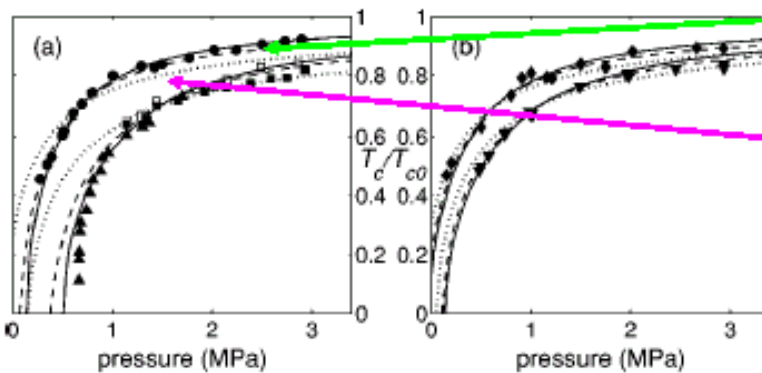
## "Void" Profile



"Void"  $\Delta$



## "Cluster" Profile



IISM

HSM

Hanninen and Thuneberg,  
PRB **67** 214507-1, (2003).











